

SIMULASI NUMERIK METODE BEDA HINGGA NON UNIFORM GRID DALAM MENYELESAIKAN MASALAH NILAI BATAS PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Pangestuti Prima Darajat

Universitas Islam Raden Rahmat

Pangestuti_prima@uniramalang.ac.id

ABSTRAK

Pada penelitian ini disimulasikan implementasi dari metode beda hingga nonuniform grid untuk menyelesaikan masalah nilai batas persamaan diferensial biasa. Penelitian ini bertujuan mendapatkan pemahaman yang baik mengenai implementasi metode beda hingga nonuniform grid, dan mendapatkan solusi dengan akurasi tinggi untuk penyelesaian numerik persamaan diferensial biasa. Dibentuk aproksimasi turunan berdasarkan deret Taylor yang kemudian di implementasikan pada persamaan diferensial biasa yang telah didiskritisasi dengan grid yang berbeda. Penyelesaian persamaan diferensial tersebut disimulasikan menggunakan program MATLAB sehingga dapat ditarik beberapa kesimpulan tentang karakteristik, efisiensi, serta, akurasi dari metode beda hingga non uniform grid.

Kata kunci: Simulasi numerik, Persamaan diferensial, Metode Beda Hingga, Nonuniform grid,.

ABSTRACT

In this paper, we simulate the implementation of finite difference method with uniform grid to solve boundary value problem of ordinary differential equation. This study aims to understand well the implementation of finite difference method and also to get numerical solution with high accuracy for ordinary differential equation. The derivative approximation is based on the Taylor series which is then implemented in ordinary differential equations that have been discretized with nonuniform grid. Completion of differential equations is simulated using the MATLAB program. So, conclusions can be drawn about the characteristics, efficiency, and accuracy of finite difference methods.

Keywords: Numerical Solution, Differential Equation, Finite Difference Method, Nonuniform Grid.

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial merupakan bagian matematika yang memainkan peran penting dalam sains modern khususnya pada pemodelan masalah fisika, biologi, geometri, dan analisis. Pada bahasan ini, dikaji persamaan diferensial yang telah didefinisikan pada suatu interval variabel bebas tertentu, dengan nilai solusi pada batas interval telah diberikan atau disebut memenuhi kondisi batas *Dirichlet* (Atkinson, 2009).

Seiring fakta-fakta yang kompleks, maka persamaan diferensial biasa yang terbentukpun juga semakin kompleks, sehingga penyelesaian analitik tidak dapat diperoleh. Oleh karena itu, banyak diformulasikan metode-metode untuk memperoleh solusi

pendekatan dengan akurasi tinggi untuk persamaan diferensial tersebut atau disebut metode numerik (Sasongko, 2010).

Metode beda hingga merupakan salah satu alat dasar penyelesaian numerik suatu persamaan diferensial. Secara umum, proses penyelesaian metode ini yaitu diawali dengan membagi variabel bebas pada persamaan diferensial menjadi titik-titik hitung atau yang disebut grid. Secara sederhana metode ini diterapkan dengan mengganti setiap turunan yang ada pada persamaan diferensial menggunakan aproksimasi beda hingga yang dibentuk dengan deret Taylor (Causon dan Migham, 2010). Pada metode ini, didefinisikan jarak antar titik sama atau uniform grid. Hasil dari pendekatan ini bergantung pada jarak

antar titik yang dipilih, semakin kecil jarak yang dipilih, maka semakin diperoleh akurasi yang tinggi (Li, 2016).

Pada kenyataannya banyak ditemui persamaan diferensial yang memiliki keadaan unik. Pada suatu selang tertentu yang memiliki perubahan solusi yang besar diperoleh solusi pendekatan yang masih memiliki galat yang besar. Sementara itu, pada interval lain dengan perubahan solusi lambat telah diperoleh galat yang minimum. Menanggapi hal tersebut, diformulasikan suatu skema beda hingga dengan membentuk grid yang berbeda-beda. Pada interval yang memuat perubahan solusi besar, maka dipilih jarak antar titik yang lebih kecil daripada interval yang memuat perubahan solusi lambat. Metode ini disebut dengan metode beda hingga *un-uniform grid* (Zhang, 2014). Dengan demikian, penelitian ini bertujuan mendapatkan pemahaman yang baik mengenai penyelesaian masalah nilai batas persamaan diferensial biasa, dan mendapatkan solusi dengan akurasi tinggi untuk penyelesaian numerik persamaan diferensial biasa..

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini masalah nilai batas persamaan diferensial biasa akan diselesaikan menggunakan metode beda hingga. Algoritma penyelesaian persamaan diferensial dengan metode beda hingga adalah sebagai berikut (Darajat, 2013),

1. Persamaan diferensial didiskritisasi pada interval yang akan diselesaikan mejadi grid-grid tertentu.
2. Setiap turunan yang termuat pada persamaan diferensial diaproksimasi menggunakan beda hingga.
3. Bentuk sistem persamaan solusi berdasarkan grid pada poin 1.
4. Diselesaikan sistem persamaan solusi tersebut.

Penyelesaian dilakukan dalam dua kondisi yaitu metode beda hingga *uniform gird* dan metode beda hingga *ununiform gird*. Pertama diselesaikan masalah nilai batas Dirichlet persamaan diferensial biasa menggunakan metode beda hingga dengan *uniform gird*. Hal ini berarti, diskritisasi interval dilakukan dengan membagi interval dengan jarak yang sama. Selanjutnya, diselesaikan masalah nilai batas Dirichlet persamaan diferensial biasa menggunakan metode beda hingga dengan *ununiform gird*. Pada metode kedua ini interval didiskritisasi dengan lebar yang berbeda

Adapun penyelesaian sistem persamaan solusi dan simulasi numerik akan digunakan program MATLAB. Selanjutnya dilakukan

analisis dan ditarik kesimpulan berdasarkan hasil simulasi numerik tersebut.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penyelesaian Masalah Nilai Batas Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Metode Beda Hingga *Uniform Gird*.

Formulasi skema beda hingga untuk masing-masing turunan pertama maupun kedua berdasarkan ekspansi deret Taylor akan dipaparkan sebagai berikut. Ekspansi deret Taylor untuk $U(x)$ disekitar titik x_j diberikan sebagai berikut :

$$U(x) = U(x_j) + \frac{U'(x_j)}{1!}(x - x_j) + \frac{U''(x_j)}{2!}(x - x_j)^2 + \frac{U'''(x_j)}{3!}(x - x_j)^3 + \dots \quad (1)$$

Ekspansi deret Taylor untuk $U(x)$ disekitar titik x_j untuk $U(x_j + h)$ dan $U(x_j - h)$ diberikan sebagai berikut :

$$U(x_j + h) = U(x_j) + \frac{U'(x_j)}{1!}h + \frac{U''(x_j)}{2!}h^2 + \frac{U'''(x_j)}{3!}h^3 + \dots \quad (2)$$

$$U(x_j - h) = U(x_j) - \frac{U'(x_j)}{1!}h + \frac{U''(x_j)}{2!}h^2 - \frac{U'''(x_j)}{3!}h^3 + \dots \quad (3)$$

Digunakan skema beda pusat untuk turunan pertama. Skema beda pusat diperoleh dengan mengurangkan persamaan (2) dengan (3) sehingga diperoleh persamaan brikut,

$$U'(x_j) = \frac{U(x_j + h) - U(x_j - h)}{2h} + O(h^2) \quad (4)$$

Skema turunan kedua beda pusat diperoleh dengan menjumlahkan persamaan (2) dan (3) sehingga diperoleh persamaan berikut,

$$U''(x_j) = \frac{U(x_j + h) + U(x_j - h) - 2U(x_j)}{h^2} + O(h^2) \quad (5)$$

Dengan demikian dapat diketahui bahwa skema beda pusat untuk turunan pertama dan kedua memiliki orde kesalahan $O(h^2)$.

Bentuk umum masalah kondisi batas Dirichlet untuk Persamaan diferensial biasa orde dua adalah sebagai berikut,

$$U''(x) = p(x)U'(x) + q(x)U(x) + r(x) \quad (6)$$

dengan x dibatasi pada interval $[a, b]$ dengan nilai batas $U(a) = U_0$ dan $U(b) = U_N$. Interval $[a, b]$ dibagi menjadi N sub interval (gird) yang sama yaitu $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ dengan lebar sub interval $h = \frac{(b-a)}{N}$.

Selanjutnya, pada persamaan (6) digunakan aproksimasi beda pusat untuk turunan pertama dan kedua yaitu persamaan (4) dan (5) sehingga persamaan (6) dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} = p(x_j) \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h} + q(x_j)U_j + r(x_j) \quad (7)$$

untuk $j = 0, 1, 2, \dots, N$. Bertujuan mempermudah perhitungan persamaan (7) disederhanakan sebagai berikut,

$$\left(1 + \frac{h}{2}p(x_j)\right)U_{j-1} + \left(-2 - h^2q(x_j)\right)U_j + \left(1 - \frac{h}{2}p(x_j)\right)U_{j+1} = h^2r(x_j) \quad (8)$$

Untuk setiap nilai j terbentuk sistem persamaan yang dapat disajikan dalam bentuk persamaan matriks sebagai berikut,

$$\begin{bmatrix} L_1 & M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ K_2 & L_2 & M_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_3 & L_3 & M_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{N-1} & L_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2r(x_1) - \left(1 + \frac{h}{2}p(x_1)\right)U_0 \\ h^2r(x_2) \\ h^2r(x_3) \\ \vdots \\ h^2r(x_{N-1}) - \left(1 + \frac{h}{2}p(x_{N-1})\right)U_N \end{bmatrix} \quad (9)$$

Dengan K, L , dan M adalah fungsi sebagai berikut,

$$K_j = 1 + \frac{h}{2}p(x_j), j = 2, 3, 4, \dots, N-1 \quad (10)$$

$$L_j = -2 - h^2q(x_j), j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (11)$$

$$M_j = 1 - \frac{h}{2}p(x_j), j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (12)$$

Simulasi Numerik 1

Diberikan persamaan diferensial linear order dua sebagai berikut,

$$\varepsilon u''(x) + xu'(x) = -\varepsilon\pi^2 \cos(\pi x) - \pi x \sin(\pi x) \quad (13)$$

untuk $-1 < x < 1$ dengan kondisi batas berikut $u(-1) = -2$ dan $u(1) = 0$. Solusi eksak dari persamaan (13) adalah

$$u(x) = \cos(\pi x) + \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)}. \quad (14)$$

Persamaan (13) dapat ditulis kembali sebagai berikut

$$u''(x) = -\frac{xu'(x)}{\varepsilon} - \pi^2 \cos(\pi x) - \frac{\pi x \sin(\pi x)}{\varepsilon}. \quad (15)$$

Berdasarkan bentuk umum pada persamaan (6), $p(x)$, $q(x)$, dan $r(x)$ pada persamaan (15) secara berturut-turut adalah sebagai berikut

$$p(x) = -\frac{x}{\varepsilon},$$

$$q(x) = 0,$$

$$r(x) = -\pi^2 \cos(\pi x) - \frac{\pi x \sin(\pi x)}{\varepsilon}.$$

Pada simulasi numerik pertama interval $-1 < x < 1$ didiskritisasi menjadi N titik dengan jarak antar titik sama sebesar $h = \frac{1-(-1)}{N} = \frac{2}{N}$. Apabila digunakan aproksimasi beda pusat untuk turunan pertama dan kedua sebagaimana telah dikonstruksi pada subbab sebelumnya maka diperoleh sistem persamaan sebagai berikut

$$Au = B$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} -2 & M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ K_2 & -2 & M_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & K_3 & -2 & M_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{N-1} & -2 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$B =$$

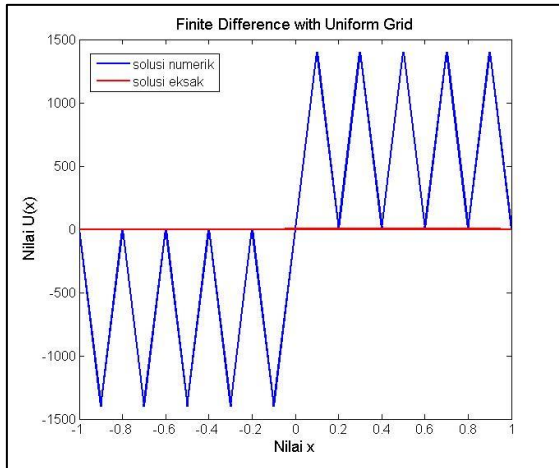
$$\begin{bmatrix} h^2 \left(-\pi^2 \cos(\pi x_1) - \frac{\pi x \sin(\pi x_1)}{\varepsilon} \right) - \left(\frac{1 - hx_1}{2\varepsilon} \right) u_0 \\ h^2 \left(-\pi^2 \cos(\pi x_2) - \frac{\pi x \sin(\pi x_2)}{\varepsilon} \right) \\ h^2 \left(-\pi^2 \cos(\pi x_3) - \frac{\pi x \sin(\pi x_3)}{\varepsilon} \right) \\ \vdots \\ h^2 \left(-\pi^2 \cos(\pi x_{N-2}) - \frac{\pi x \sin(\pi x_{N-2})}{\varepsilon} \right) \\ h^2 \left(-\pi^2 \cos(\pi x_{N-1}) - \frac{\pi x \sin(\pi x_{N-1})}{\varepsilon} \right) - \left(\frac{1 - hx_{N-1}}{2\varepsilon} \right) u_N \end{bmatrix}$$

Dengan K_j dan M_j diberikan oleh persamaan berikut,

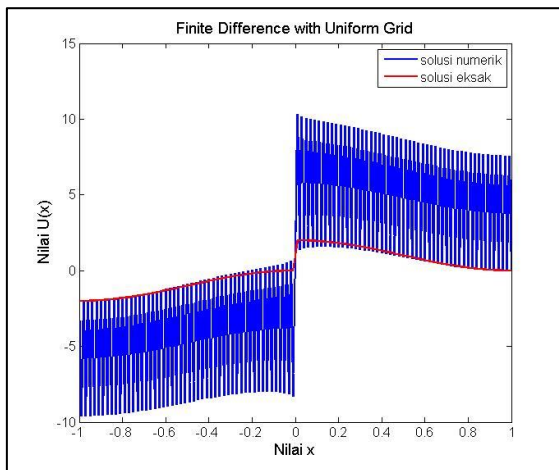
$$K_j = 1 - \frac{hx_j}{2\varepsilon}, j = 2, 3, \dots, N-1.$$

$$M_j = 1 + \frac{hx_1}{2\varepsilon}, j = 1, 2, \dots, N-1.$$

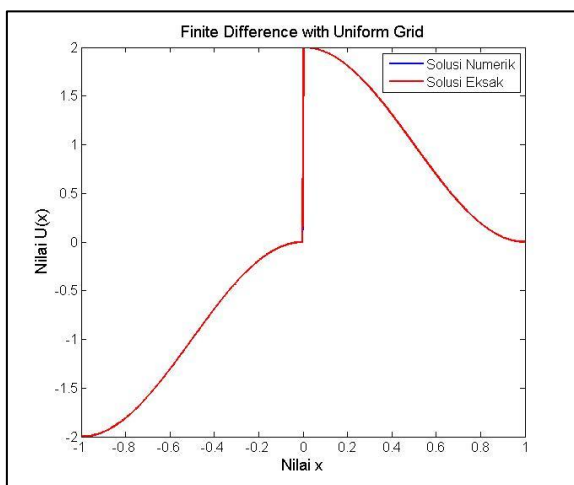
Plot hasil dan besarnya galat maksimum penyelesaian persamaan (13) menggunakan metode beda hingga *uniform grid* diberikan pada gambar-gambar sebagai berikut,



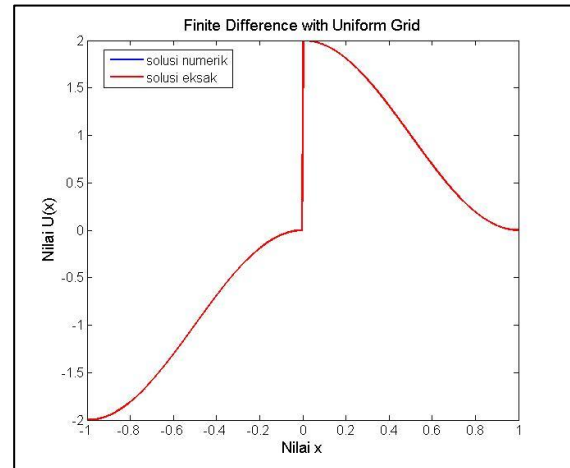
Gambar 1. Grafik dengan $h = 0.1$ menyebabkan galat maksimum sebesar 1.3985×10^3



Gambar 2. Grafik dengan $h = 0.01$ menyebabkan galat maksimum sebesar 8.3164



Gambar 3. Grafik dengan $h = 0.001$ menyebabkan galat maksimum sebesar 0,0673



Gambar 3. Grafik dengan $h = 0.0005$ menyebabkan galat maksimum sebesar 0.0156

Penyelesaian Masalah Nilai Batas Persamaan Diferensial Biasa Menggunakan Metode Beda Hingga *Ununiform Grid*.

Masalah nilai batas Dirichlet persamaan diferensial biasa diselesaikan menggunakan metode beda hingga dengan *ununiform grid*. Pada metode kedua ini interval didiskritisasi dengan lebar yang berbeda. Misal didefinisikan,

$$h_1 = x_j - x_{j-1}$$

$$h_2 = x_{j+1} - x_j$$

- Ekspansi deret Taylor untuk $U(x_j + h_2)$ disekitar titik x_j adalah sebagai berikut,

$$U(x_j + h_2) = U(x_j) + \frac{U'(x_j)}{1!} h_{(j+1)} + \frac{U''(x_j)}{2!} h_{(j+1)}^2 + \frac{U'''(x_j)}{3!} h_{(j+1)}^3 + \dots \quad (16)$$

Sementara itu, Ekspansi deret Taylor untuk $U(x_j - h_1)$ disekitar titik x_j adalah sebagai berikut,

$$U(x_j - h_j) = U(x_j) - \frac{U'(x_j)}{1!} h_j + \frac{U''(x_j)}{2!} h_j^2 - \frac{U'''(x_j)}{3!} h_j^3 + \dots \quad (17)$$

Aproksimasi turunan pertama beda pusat didekati dengan persamaan berikut,

$$U'(x_j) = \alpha U(x_{j-1}) + \beta U(x_j) + \gamma U(x_{j+1}) \quad (18)$$

Berdasarkan deret Taylor untuk $U(x_{j-1})$ dan $U(x_{j+1})$ maka diperoleh,

$$\begin{aligned}
U'(x_j) &= \frac{-h_{(j+1)}}{h_j(h_j + h_{(j+1)})} U(x_{j-1}) \\
&+ \frac{(h_{(j+1)} - h_j)}{h_j h_{(j+1)}} U(x_j) \\
&+ \frac{h_j}{h_{(j+1)}(h_j + h_{(j+1)})} U(x_{j+1})
\end{aligned} \quad (19)$$

Dengan orde kesalahan :

$$U'(x_j) = U'(x_j) + O(h_j h_{(j+1)})$$

Selanjutnya, akan dipaparkan aproksimasi turunan kedua beda pusat. Misalkan didekati dengan persamaan berikut,

$$U''(x_j) = aU(x_{j-1}) + bU(x_j) + cU(x_{j+1}) \quad (20)$$

Berdasarkan deret Taylor untuk $U(x_{j-1})$ dan $U(x_{j+1})$ maka diperoleh, dengan

$$\begin{aligned}
U''(x_j) &= (a + b + c)U(x_j) \\
&+ (-ah_j + ch_{(j+1)})U'(x_j) \\
&+ \left(\frac{ah_j^2 ch_{(j+1)}^2}{2!}\right)U''(x_j) \\
&+ \left(\frac{-ah_j^3 + ch_{(j+1)}^3}{3!}\right)U'''(x_j) \\
&+ \left(\frac{ah_j^4 + ch_{(j+1)}^4}{4!}\right)U''''(x_j) + \dots
\end{aligned} \quad (21)$$

Dengan nilai a, b, c , sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
a &= \frac{2}{h_j(h_j + h_{(j+1)})} \\
b &= \frac{-2(h_j + h_{(j+1)})}{h_j h_{(j+1)}(h_j + h_{(j+1)})} \\
c &= \frac{2}{h_{(j+1)}(h_j + h_{(j+1)})}
\end{aligned}$$

Dengan orde kesalahan :

$$U''(x_j) = U''(x_j) + O(h)$$

Berdasarkan simulasi pertama, terlihat bahwa terjadi perubahan nilai solusi yang cepat pada interval di sekitar $x = 0$. Oleh karena itu, pada simulasi numerik kedua ini digunakan metode beda hingga *ununiform grid*. interval $-1 < x < 1$ didiskritisasi menjadi N titik dengan jarak antar titik tidak sama yaitu sebesar h_1 untuk selang $-1 < x \leq -0.05$ dan $0.05 \leq x < 1$ serta sebesar h_2 untuk selang $-0.05 < x < 0.05$. Apabila digunakan aproksimasi beda pusat untuk turunan pertama dan kedua

sebagaimana telah dikonstruksi pada persamaan (19) dan (21) sebelumnya maka diperoleh sistem persamaan sebagai berikut,

$$Au = B \quad (22)$$

dengan

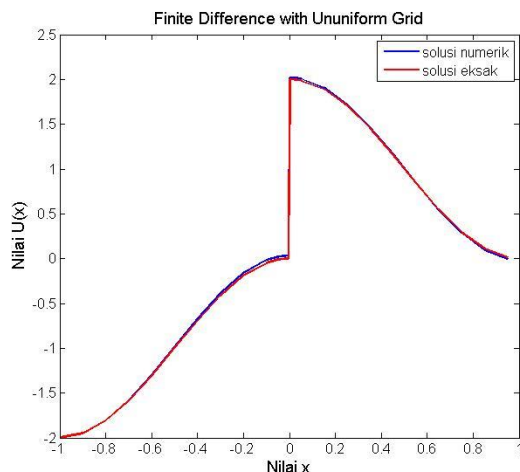
$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} L_1 & M_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & L_2 & M_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_3 & L_3 & M_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{N-2} & L_{N-2} & M_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & K_{N-1} & L_{N-1} \end{bmatrix}, \\
u &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \begin{bmatrix} h^2 \left(-\pi^2 \cos(\pi x_1) - \frac{\pi x \sin(\pi x_1)}{\varepsilon} \right) - K_1 u_0 \\ h^2 \left(-\pi^2 \cos(\pi x_2) - \frac{\pi x \sin(\pi x_2)}{\varepsilon} \right) \\ h^2 \left(-\pi^2 \cos(\pi x_3) - \frac{\pi x \sin(\pi x_3)}{\varepsilon} \right) \\ \vdots \\ h^2 \left(-\pi^2 \cos(\pi x_{N-2}) - \frac{\pi x \sin(\pi x_{N-2})}{\varepsilon} \right) \\ h^2 \left(-\pi^2 \cos(\pi x_{N-1}) - \frac{\pi x \sin(\pi x_{N-1})}{\varepsilon} \right) - M_{N-1} u_N \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

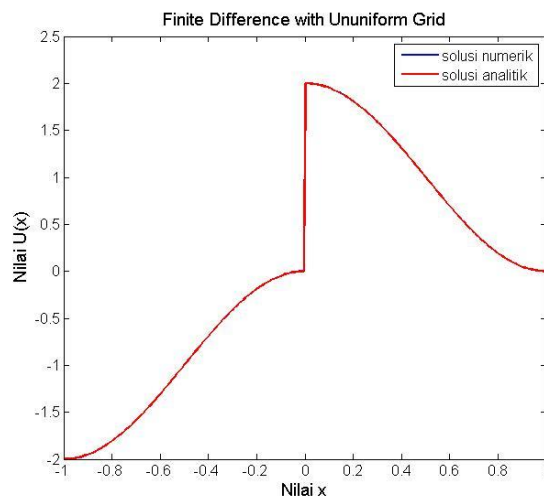
Dan

$$\begin{aligned}
K_i &= a_i - \alpha_i p(x_i), i = 2, 3, 4, \dots, N-1, \\
L_i &= b_i - \beta_i p(x_i) - q(x_i), i = 1, 2, 3, \dots, N-1, \\
M_i &= c_i - \gamma_i p(x_i), i = 1, 2, 3, \dots, N-2 \\
a_i &= \frac{2}{h_i(h_i + h_{i+1})}, \\
b_i &= -\frac{2(h_i + h_{i+1})}{h_i h_{i+1}(h_i + h_{i+1})}, \\
c_i &= \frac{2}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})}, \\
\alpha_i &= \frac{-h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})}, \\
\beta_i &= \frac{(h_{i+1} - h_1)}{h_i h_{i+1}}, \\
\gamma_i &= \frac{h_i}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})}, \\
h_i &= x_i - x_{i-1}, \\
h_{i+1} &= x_{i+1} - x_i.
\end{aligned}$$

Plot hasil dan besarnya galat maksimum penyelesaian persamaan (22) adalah sebagai berikut,



Gambar 4. Grafik dengan $h_1 = 0,1$ dan $h_2 = 0.00005$ menghasilkan galat maksimal 0,0324.



Gambar 5. Grafik dengan $h_1 = 0,001$ dan $h_2 = 0.00005$ menghasilkan galat maksimal 0,0001596.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Penyelesaian persamaan diferensial biasa yang memiliki perubahan solusi besar menggunakan skema *uniform grid* stabil ketika jarak antar *grid* dipilih sangat kecil. Akibatnya, iterasi yang dilakukan akan semakin banyak dan tidak efisien. Oleh karena itu, perlu diterapkan skema beda hingga *nonuniform grid*. Jarak antar *grid* dipilih kecil jika perubahan nilai solusi terjadi dengan cepat, dan jarak antar *grid* dipilih besar jika perubahan nilai solusi terjadi dengan lambat. Dengan demikian, skema *Non Uniform Grid* memberikan solusi dengan akurasi yang tinggi dan efisiensi yang lebih baik.

Saran

Skema beda hingga non uniform grid dapat diterapkan pada persamaan diferensial orde yang lebih tinggi untuk mendapatkan interpretasi lain tentang akurasi dan efisiensinya.

REFERENSI

Atkinson, K., Han, W., Stewart, D. 2009. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Iowa : Wiley Publication

Causon, D.M, dan Mingham, C.G. 2010. *Introductory Finite Difference Methods for PDEs*. United Kingdom: Ventus Publishing ApS.

Darajat, P.P. 2013. Deskripsi Metode Beda Hingga untuk Menyelesaikan Persamaan FitzHugh-Nagumo. Skripsi. Malang : Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Li, C., Yi, Q., Chen, An., 2016. Finite Difference Method with Non-uniform meshes for nonlinear fractional differential equations. *Journal of Computational Physics*, 316 : 614-631.

Sasongko, Setia Budi. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta : C.V ANDI OFFSET.

Zhang, Y., Sun, Z., Liao, H., 2014. Finite difference methods for the time fractional diffusion equation on non-uniform meshes. *Journal of Computational Physics*, 265 : 195-210.